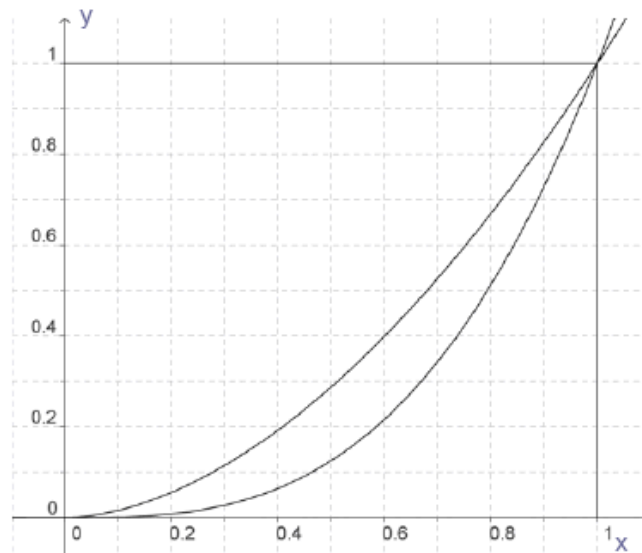


Abitur 2008 Mathematik LK Infinitesimalrechnung Aufgabe A2

In der Volkswirtschaft wird unter anderem die Verteilung von Vermögen (Einkommen, Steueraufkommen, Grundbesitz etc.) untersucht. Zur anschaulichen Darstellung solcher Verteilungen sind LORENZ-Kurven üblich.

Verläuft der Graph einer LORENZ-Funktion zum Beispiel durch den Punkt $(0,4|0,1)$, so bedeutet dies, dass die ärmeren 40% der Bevölkerung zusammen über 10% des gesamten Vermögen verfügen.

Auf der x -Achse ist also der Bevölkerungsanteil nach wachsendem Vermögen geordnet, auf der y -Achse (für den jeweiligen Bevölkerungsanteil) der zugehörige Anteil am gesamten Vermögen aufgetragen.



Teilaufgabe 1. (6 BE)

Bestimmen Sie für eine Verteilung, bei der die ärmeren 40% der Bevölkerung 10% des Gesamtvermögens besitzen, den Term der LORENZ-Funktion als Potenzfunktion vom Typ x^r .

Ermitteln Sie den Vermögensanteil der *reichsten* 20% der Bevölkerung bei dieser Verteilung.

Teilaufgabe 2. (12 BE)

Begründen Sie folgende Eigenschaften aller LORENZ-Funktionen f aus dem Sachzusammenhang:

- Der Definitionsbereich ist $[0; 1]$ und es gilt $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$.
- Sie haben im Inneren des Intervalls $[0; 1]$ keine negativen Funktionswerte.
- Sie sind im Inneren des Intervalls $[0; 1]$ monoton wachsend und linksgekrümmt.

Weisen Sie nach, dass $b(x) = 2 \cdot 1,5^x - 2$ eine Funktion mit diesen Eigenschaften ist.

Beschreiben Sie die LORENZ-Kurve für eine gleichmäßige Vermögensverteilung.

Als Maß für die Ungleichheit einer Verteilung wird in der Volkswirtschaft der GINI-Koeffizient benutzt. Er berechnet sich als Verhältnis des Inhalts der Fläche zwischen der Diagonalen des Einheitsquadrates und der jeweiligen LORENZ-Kurve zum Flächeninhalt des Dreiecks unter der Diagonalen des Einheitsquadrats.

Teilaufgabe 3. (13 BE)

Berechnen Sie aufgrund der obigen Definition die GINI-Koeffizienten für die LORENZ-Funktionen $f(x) = x^3$ und $g(x) = x^8$.

Begründen Sie allgemein, welche Werte der GINI-Koeffizient bei sehr ungleichmäßigen Verteilungen annimmt und welche Werte er überhaupt annehmen kann.

Zeigen Sie, dass der GINI-Koeffizient bei LORENZ-Funktionen vom Typ x^r ($r \geq 1$) immer den Wert $G = \frac{r-1}{r+1}$ hat.

Teilaufgabe 4. (9 BE)

Bestimmen Sie den GINI-Koeffizienten der Verteilung $b(x) = 2 \cdot 1,5^x - 2$.

Berechnen Sie die Werte der Ableitung der LORENZ-Funktion b mit $b(x) = 2 \cdot 1,5^x - 2$ an den Stellen $x = 0,4$ und $x = 0,9$.

Beschreiben Sie die inhaltliche Bedeutung dieser Ableitungswerte.